Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 13

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Seien m und n teilerfremde positive ganze Zahlen und schreibe $\frac{m}{n} = [q_0; q_1, \dots, q_r]$. Wir wollen in dieser Aufgabe die Theorie der Kettenbrüche verwenden, um die lineare diophantische Gleichung $mx - ny = 1$ vollständig zu lösen. Gehen Sie nun wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie zunächst, dass wir stets annehmen dürfen, dass $md_{r-1} - nc_{r-1} = 1$ ist, wobei $\frac{c_k}{d_k}$ wie sonst auch der k-te Näherungsbruch ist. Insbesondere haben wir also eine Lösung (x_0, y_0) gefunden.

(ii) Sei nun (x, y) eine beliebige Lösung. Begründen Sie, dass $x - x_0 = tn$ und $y - y_0 = tm$ für eine ganze Zahl t sind.

(iii) Zeigen Sie abschließend, dass all die so beschriebenen (x, y) auch wirklich Lösungen sind.

Multiplikation mit einer ganzen Zahl l liefert dann so auch noch die Lösungen von $mx - ny = l$ und im Endeffekt die Lösungen von $\pm mx \pm ny = l$ (wie auch aus der Einführung bekannt).

Aufgabe 2 (7 Punkte):
In der Einführung in die Zahlentheorie hatten wir unter Anderem die Kettenbruchentwicklung von $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ studiert, wobei $(F_k)_{k\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ die Fibonacci-Folge ist. Hier nun etwas Ähnliches:

(i) Wir schreiben $[4^{(k)}]$ für den Kettenbruch $[4; 4, \dots, 4]$, in dem die Zahl 4 genau k mal auftritt. Weisen Sie nach, dass sich der Kettenbruch $[4^{(k)}, q_1]$ für $k \geq 1$ auch als $\frac{u_{k+1}q_1 + u_k}{u_k q_1 + u_{k-1}}$ schreiben lässt, wobei $(u_k)_{k\geq 0}$ durch $u_0 = 0, u_1 = 1$ und $u_n = 4u_{n-1} + u_{n-2}$ für $n \geq 2$ definiert ist.

(ii) Folgern Sie nun, dass

$$\frac{F_{n+3}}{F_n} = \begin{cases} [4^{(m)}, 3], & \text{falls } n = 3m + 1 \\ [4^{(m)}, 5], & \text{falls } n = 3m + 2 \\ [4^{(m)}, 4], & \text{falls } n = 3m + 3 \end{cases}$$

für alle $m \geq 2$ ist.

Aufgabe 3 (7 Punkte):
Sei $(q_n)_{n\geq 0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass der Kettenbruch $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n\geq 0} q_n$ divergiert.